NÚMEROS COMPLEJOS

1. PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS. CONJUNTO PRODUCTO

Sean A, B dos conjuntos. Se llama producto cartesiano de A por B al conjunto formado por todas las parejas posibles que podemos formar tomando un elemento de A y otro de B.

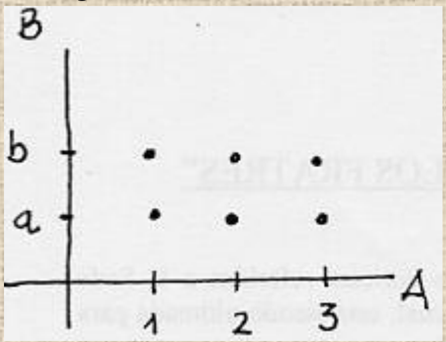
$$AxB = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

Un par son dos números dados en un orden.

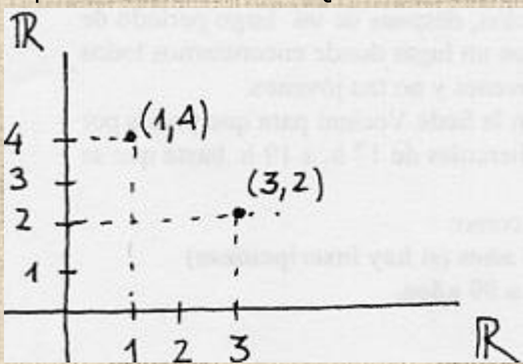
Por ejemplo, vamos a construir el A x B donde A = {1, 2, 3} y B = {a, b}

Esto me daría: A x B = {(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)}

Admite una representación gráfica:



El plano geométrico precisamente es R x R. Que abreviadamente escribimos R^2.



Observar cómo el orden de los números es importante pues me daría puntos diferentes.

2. NÚMEROS IMAGINARIOS

La aritmética y la geometría podríamos decir que han sido la fuente progresiva de los números N, Z, Q y R.

Con los números racionales hubo un momento en que se pensó que ya se habían descubierto todos los números y, por lo tanto, que se podía medir cualquier cantidad. Pero se vio que existían otros números 'irracionales'. No obstante, parece que los números reales agotaban todas las posibilidades puesto que llenamos la recta.

Poner en la pizarra dos partes: algebraica con la ecuación de abajo, geométrica partiendo del eje real. Después ampliar según se deduce. Comentar el tema de las conjugadas que salen siempre como solución.

Por ejemplo, veamos las soluciones de la ecuación: $x^2-6x+13=0$. Otro ejemplo posible es $x^2-4x+29=0$

Fue el matemático italiano Bombelli (1526-1573) empezó a trabajar con $\sqrt{-1}$ como si fuera un número más. Pero no fueron aceptados por los matemáticos como "reales", ni tampoco se les encontró una utilidad.

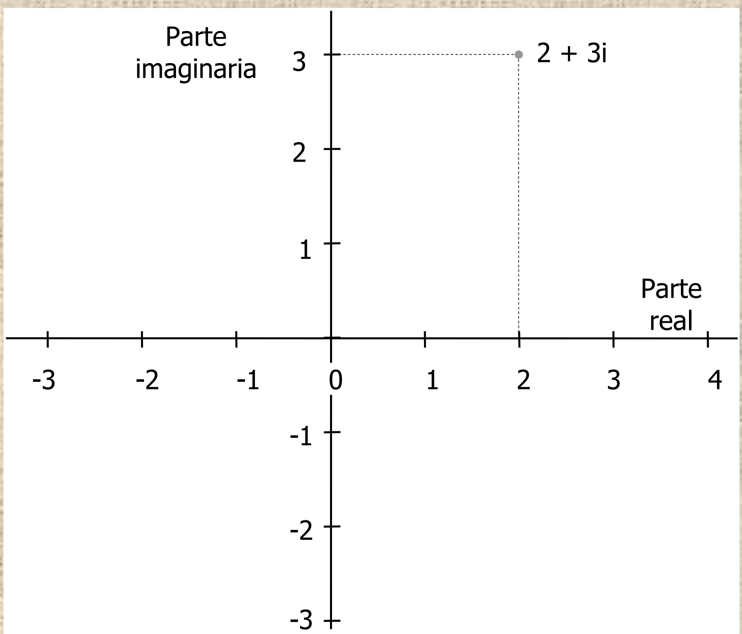
Porque cualquier otra raíz negativa será un factor de ella.

Por ejemplo, $\sqrt{-36}=\sqrt{36\cdot(-1)}=6\sqrt{-1}$

Euler en 1777 le puso el nombre de número imaginario y le asignó la letra i= $\sqrt{-1}$ para abreviar.

La primera parte se llama real y la segunda parte imaginaria. A estos números se les llama números complejos y se representan por la letra C.

Y Gauss (1777-1855) el que les asoció una imagen geométrica que les convertía en números "planos".



Ejercicio:

Señala en el gráfico anterior el afijo (punto) de los siguientes números complejos: 1+2i; −2−i; −3i; −2.

3. NÚMEROS COMPLEJOS

Se llama número complejo a cualquier del tipo a + bi donde a, b ∈ R, con $i^2 = -1$.

Ejemplos:

$2 + 3i = 2 + 3\sqrt{-1}$; 1 − i = …; 5i = …; 7

Se designan con la letra C:

$$C = \{a + bi/\ a, b \in R\}$$

a: parte real.

b: parte imaginaria.

Su representación gráfica ya la conocemos.

Así ampliamos los conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

−a − bi es el opuesto de a + bi

a − bi es el conjugado de a + bi

Se llama número imaginario puro al número complejo cuya parte imaginaria no es nula. P. ejemplo: 5i

Se llama forma cartesiana de un número complejo a la expresión (a, b). Por ejemplo: (3, 5)

Se llama forma binómica de un número complejo a la expresión a + bi. P. ejemplo: 3 + 5i

4. OPERACIONES

La operatividad que elegimos es la propia de los números tan sólo teniendo en cuenta que $i^2=-1$. Tienen las mismas propiedades operativas que los números reales: neutro, opuesto, asociativa…

- (2+5i)+(7+i)=

- (2+5i)−(7+i)=

- (2+5i)·(7+i)=

- Un número por su conjugado siempre queda número real.

(2+5i)·(2−5i)=

- Esto se aprovecha para dividir dos números complejos:

$$\frac{2+5i}{7+i}$$

Propiedades operativas. Se puede omitir.

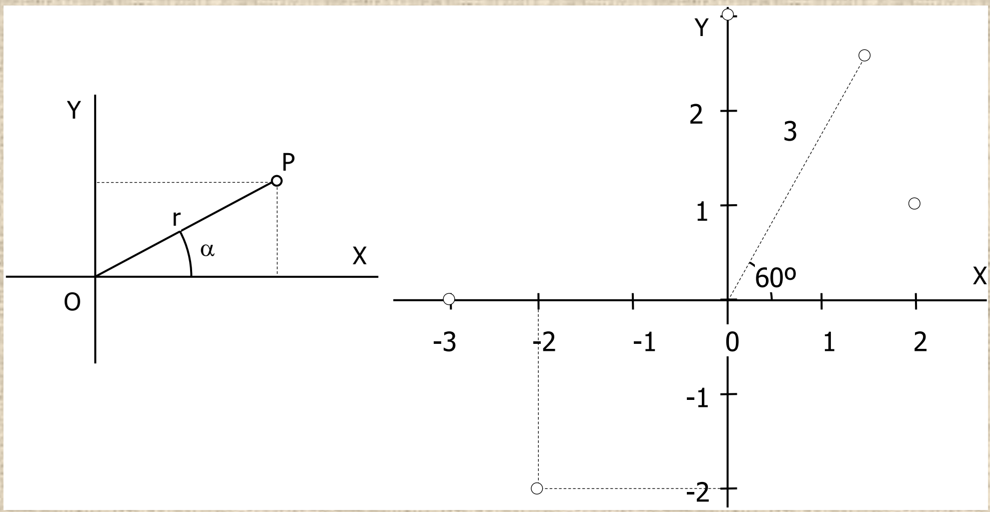
- La suma de números complejos es asociativa y conmutativa.
- El 0 es el elemento neutro de la suma.
- Todo número complejo tiene su opuesto. El opuesto de a+bi es −a−bi
- La multiplicación de números complejos es asociativa y conmutativa.
- El 1 es el elemento neutro del producto.
- Todos los números complejos, salvo el 0, tienen un inverso. Y el inverso es $\frac{1}{a+bi}$

• Además la multiplicación es distributiva respecto de la suma.

FORMA POLAR

Se llaman coordenadas polares de un punto P del plano a la pareja formada por los valores:

• Distancia del punto al origen de coordenadas O: r
• Ángulo que forma la semirrecta OP con OX; α.



P(r, α):
r: distancia al origen.
α: ángulo que forma.
O polo.
OX eje polar.
Escribiremos así $z \in C$; $z = r_\alpha$. Se llama:
r: módulo del número complejo.
α: argumento del número complejo.

Ejercicios:

De los afijos que hay en el dibujo dar su valor en polares y en cartesianas.

Se puede empezar, antes de ver las fórmulas, pidiendo las coordenadas polares de $(1, \sqrt{3})$, haciendo el dibujo correspondiente. Lo mismo para el complejo $3_{60º}$ pidiendo sus coordenadas cartesianas.

CAMBIO DE COORDENADAS

Es fácil el paso de unas coordenadas a otras:

Polares $r_\alpha \rightarrow$ Cartesianas (a,b):

$$\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Polares $r_\alpha \rightarrow$ Binómica a + bi:

$$r\cos\alpha + r\,\mathrm{sen}\,\alpha i = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

Esta es la forma trigonométrica.
Los complejos de la forma $\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ son de módulo 1.
Cartesianas (a, b) $\rightarrow$ Polares r_α :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ejercicios:

Pasar a cartesianas los puntos P(1,90º); P(2,30º)…
Y pasar a polares P(0,1), P(1,1); P(−1,0); P(−1,−1).

Ejercicios:

Pasar a cartesianas:
$5_{225º}$; $4_{0º}$; $3_{270º}$
Pasar a polares:
$-2 + 2\sqrt{3}i; i; -2$
Multiplicar por i equivale a girar 90º. Fácilmente se comprende al hacerlo en polares.

5. OPERACIONES EN FORMA POLAR

La suma y resta quedan muy complicadas. Siempre en forma binómica.

PRODUCTO, POTENCIA Y DIVISIÓN: DEMOSTRACIÓN OPTATIVA Y FINAL.

$$r_\alpha \cdot R_\beta = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = r\cdot R(\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)) = r\cdot R_{\alpha+\beta}$$

$$(r_\alpha)^n = r^n{}_{n\alpha}$$

$$\frac{r_\alpha}{R_\beta} = \left(\frac{r}{R}\right)_{\alpha-\beta}$$

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \frac{r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}{r'(\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha') + i\operatorname{sen}(\alpha-\alpha')) = \frac{r}{r'}{}_{\alpha-\alpha'}$$

RADICACIÓN

Igualdad de números complejos

$$r_\alpha = R_\beta \quad si \quad \begin{cases} r = R \\ \alpha = \beta + k\cdot 360 \end{cases}$$

Por ejemplo, $3_{120} = 3_{-240} = 3_{480}$
Así un mismo número admite infinitos argumentos aunque un solo módulo.

Empezar poniendo:

$$\left.\begin{array}{l} (1_0)^3 = 1_0 = 1 \\ (1_{120})^3 = 1_{360} = 1 \\ (1_{240})^3 = 1_{720} = 1 \end{array}\right\} \sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1_0 \\ 1_{120} \\ 1_{240} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha \to (r_\alpha)^n = r^n{}_{n\alpha} = R_\beta \to \begin{cases} r^n = R \to r = \sqrt[n]{R} \\ n\alpha = \beta + k\cdot 360 \to \alpha = \dfrac{\beta + k\cdot 360}{n} = \dfrac{\beta}{n} + k\cdot\dfrac{360}{n} \\ k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Ejemplo

Hacer $\sqrt[3]{8_{60^\circ}}$ y luego la comprobación y algún dibujo.

Resolver la ecuación $z^3 + 64 = 0$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. NÚMEROS IMAGINARIOS

2. NÚMEROS COMPLEJOS

3. OPERACIONES

1. Halla en forma binómica y representa la solución obtenida: $\dfrac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$

SOL: $\dfrac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}=\dfrac{25i(1-7i)}{1+7i}=\dfrac{25i(1-7i)^2}{(1+7i)(1-7i)}=\dfrac{25i(1+49i^2-14i)}{1-49i^2}=\dfrac{25i(1-49-14i)}{1+49}=\dfrac{25i(-48-14i)}{50}$

$=\dfrac{i(-48-14i)}{2}=\dfrac{-48i-14i^2}{2}=\dfrac{-48i+14}{2}=\dfrac{14-48i}{2}=\dfrac{14}{2}-\dfrac{48i}{2}=7-24i$

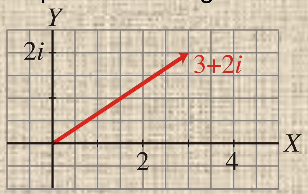
2. Calcula y representa la solución obtenida:

$$\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}$$

Solución:

$$\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}=\frac{-1(5-i)}{-1+i}=\frac{-5+i}{-1+i}=\frac{(-5+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{5+5i-i-i^2}{1-i^2}=\frac{5+5i-i+1}{1+1}=\frac{6+4i}{2}=\frac{6}{2}+\frac{4i}{2}=3+2i$$

Representación gráfica:



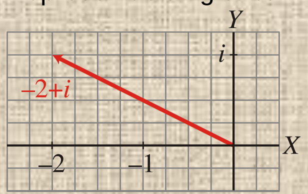
3. Efectúa en forma binómica y representa gráficamente la solución: $\dfrac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$

Solución:

$$\frac{5i^{10}(1-i)}{3-i}=\frac{5(-1)(1-i)}{3-i}=\frac{-5+5i}{3-i}=\frac{(-5+5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{-15-5i+15i+5i^2}{9-i^2}=\frac{-15-5i+15i-5}{9+1}=$$

$$=\frac{-20+10i}{10}=\frac{-20}{10}+\frac{10i}{10}=-2+i$$

Representación gráfica:



4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

4. Halla los números complejos, z, que cumplen la siguiente igualdad: $z^3+64=0$

SOL: $z^3+64=0 \rightarrow z^3=-64 \rightarrow z=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{64_{180^\circ}}$

$z=4_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}}=4_{60^\circ+120^\circ k}\ ; \quad k=0,1,2$

Las tres raíces son:

$4_{60^\circ};\ 4_{180^\circ};\ 4_{300^\circ}$

5. Halla todas las soluciones de la ecuación y represéntalas: $2z^6+2=0$

SOL: $2z^6+2=0 \rightarrow 2z^6=-2 \rightarrow z^6=-1$

$z=\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}}=1_{30^\circ+60^\circ k}\ ; \quad k=0,1,2,3,4,5$

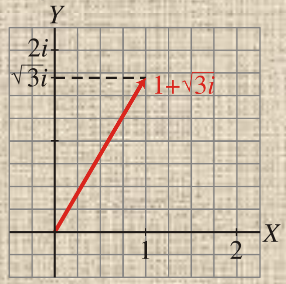
Las seis soluciones son:

$1_{30^\circ};\ 1_{90^\circ};\ 1_{150^\circ};\ 1_{210^\circ};\ 1_{270^\circ};\ 1_{330^\circ}$

6. *Calcula* z^8 *, sabiendo que* $z=1+\sqrt{3}i$.

Solución:

Expresamos z en forma polar:



$|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$tg\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \rightarrow \alpha=60^\circ$ (pues está en el 1er cuadrante)

Por tanto:

$$z^8=\left(2_{60^\circ}\right)^8=256_{480^\circ}=256_{120^\circ}=256\left(\cos 120^\circ+i\,sen\,120^\circ\right)=256\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-128+128\sqrt{3}i$$

Es decir:

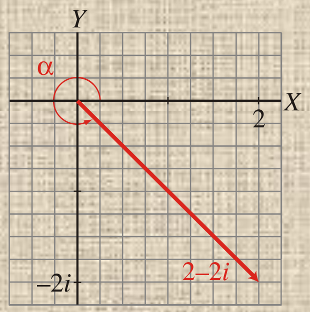
$z^8=256_{120^\circ}=-128+128\sqrt{3}i$

7. Halla un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces quintas es 2 – 2i.

Solución:

$z=(2-2i)^5$

Expresamos $2-2i$ en forma polar:



$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$tg\,\alpha = \dfrac{-2}{2} = -1 \quad \to \quad \alpha = 315^\circ$ (pues está en el 4.º cuadrante)

Por tanto:

$$z = (2-2i)^5 = \left(\sqrt{8}_{315^\circ}\right)^5 = \left(\sqrt{2^3}_{315^\circ}\right)^5 = \sqrt{2^{15}}_{1\,575^\circ} = 2^7\sqrt{2}_{135^\circ} = 128\sqrt{2}_{135^\circ} = 128\sqrt{2}\left(cos135^\circ + isen135^\circ\right) =$$

$$= 128\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -128+128i$$

Es decir:

$z = 128\sqrt{2}_{135^\circ} = -128+128i$

8. Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

Solución:

$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}} = 3_{45^\circ+90^\circ k};\quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$3_{45^\circ};\quad 3_{135^\circ};\quad 3_{225^\circ};\quad 3_{315^\circ}$

9. Calcula $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}}$ y representa las soluciones.

Solución:

$1_{120};1_{300}$

10. Halla los números complejos, z, que cumplen la siguiente igualdad.

$z^3 + 64 = 0$

sol: 4_{60°; 4_{180°; 4_{300°